31/10/2016

Πρόταση

Αν (a_n), (b_n) δυο ακολουθίες ώστε $a_n \to 0$ και (b_n) φραγμένη τότε $a_n \cdot b_n \to 0$

Απόδειξη

Εφόσον (b_n) φραγμένη $\exists M>0$ ώστε $|b_n|<M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $\varepsilon>0$

Εφόσον $a_n \to 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$

$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$ Συνεπώς $a_n b_n \to 0$

Πρόταση (άλγεβρα των ορίων)

Έστω (a_n), (b_n) δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών και $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to a$, $b_n \to b$

Τότε

(i) $a_n + b_n \to a + b$

(ii) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

(iii) Αν $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $b \neq 0$ τότε $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$

(iv) » » » » τότε $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

Απόδειξη

(i) Έστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον $a_n \to a$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_1$ να ισχύει $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Εφόσον $b_n \to b$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_2$ να ισχύει $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Επομένως $a_n + b_n \to a + b$

(ii)

$|a_n b_n - ab| = |a_n \cdot b_n - a b_n + a b_n - a \cdot b| \leq$

$\leq |a_n \cdot b_n - a b_n| + |a b_n - a b|$

$$= \underbrace{\underset{\text{φραγμένη}}{|b_n|}\,\underset{\to 0}{|a_n - a|}}_{\to 0} + \underbrace{\underset{\text{φραγμένη}}{|a|}\,\underset{\to 0}{|b_n - b|}}_{\to 0}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\to 0}$$

Συνεπώς $|a_n b_n - ab| \to 0$ Άρα από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών προκύπτει $|a_n b_n - a \cdot b| \to 0$ άρα $a_n b_n \to a \cdot b$.

(iii) Έστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον $b_n \to b$ και $b \neq 0$ $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ $\forall\, n \geq n_1$

Επίσης εφόσον $b_n \to b$ $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$ $\forall\, n \geq n_2$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n-b|}{|b_n||b|} < \frac{2}{|b|}\cdot\frac{1}{|b|}\,\frac{\varepsilon|b|^2}{2} = \varepsilon$$

Επομένως

$$\frac{1}{b_n}\to\frac{1}{b}$$

(iv) Απο το (iii) $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{b_n}\to\frac{1}{b}\\ \\ a_n\to a\end{array}\right\} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} a_n\frac{1}{b_n}\to a\frac{1}{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (x_n)

$$x_n=\frac{5n^2+7n+4}{17n^2+8n+3}$$

$$x_n=\frac{5+7\cdot\frac{1}{n}+4\cdot\frac{1}{n^2}}{17+8\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}$$

Εχουμε $\frac{1}{n}\to 0 \Rightarrow 7\cdot\frac{1}{n}\to 0$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{n}\to 0\\ \frac{1}{n}\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{n^2}\to 0 \Rightarrow 4\cdot\frac{1}{n^2}\to 0$$

$$5+7\cdot\frac{1}{n}+4\cdot\frac{1}{n^2}\to 5$$

Ομοίως για την ακολουθία του παρανομαστή

$$17+8\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n^2}\to 7$$

$$\Rightarrow \frac{5+7\cdot\frac{1}{n}+4\frac{1}{n^2}}{17+8\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}\to\frac{5}{17}$$

δηλ. $x_n\to\frac{5}{17}$

Πρόταση

Αν $a \in \mathbb{R}$ $|a|<1$ $(\Leftrightarrow -1<a<1)$

τότε $a^n \to 0$

Απόδειξη

→ Αν $a=0$ τότε $a^n=0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ άρα $\lim a^n = 0$

→ Αν $a \neq 0$ $0<|a|<1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{|a|}>1$

Έτσι $\frac{1}{|a|}=1+\theta$ για κάποιο $\theta>0$

Έχουμε $\frac{1}{|a^n|}=\frac{1}{|a|^n}=(1+\theta)^n \geq 1+\theta n > \theta n$

$\Leftrightarrow 0<|a^n|<\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{n}$

Εφόσον $\lim 0 = 0$

$\lim \frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{n}=0$

Απο το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει

ότι $a^n \to 0$

Πρόταση

Εστω $a>0$ τοτε $\sqrt[n]{a} \to 1$

Αποδ

1η περίπτωση Αν $a=1$

τότε $\sqrt[n]{a}=1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sqrt[n]{a} \to 1$

2η περίπτ. Αν $a>1$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\sqrt[n]{a}>1$ άρα γράφεται

$\sqrt[n]{a}=1+\theta_n$ για $\theta_n>0$

Έχουμε $a=(\sqrt[n]{a})^n=(1+\theta_n)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ανισ. Bernoul.}}}{\geq} 1+n\theta_n > n\theta_n$ Συνεπώς

$0 < \theta_n < a \cdot \frac{1}{n}$

Άρα $\theta_n \to 0$ και προκύπτει ότι

$\sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n \to 1 + 0 = 1$

3η περίπτ. $0 < a < 1$ Τότε $\frac{1}{a} > 1$

Άρα από τη 2η περίπτωση

$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$

δηλ. $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$

Πρόταση $\sqrt[n]{n} \to 1$

Απόδειξη

Έχουμε $\sqrt[2n]{n} \geq 1$

άρα $\sqrt[2n]{n} = 1 + \theta_n$ για $\theta_n \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{n} = (1+\theta_n)^n \underset{\uparrow}{\geq} 1 + \theta_n \cdot n > n \cdot \theta_n$

ανισ. Bernoull

Έτσι

$0 \leq \theta_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $0 \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

Συνεπώς από θ. Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών $\theta_n \to 0$

$\sqrt[2n]{n} = 1 + \theta_n \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1+\theta_n)^2 \to 1$

Πρόταση

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \geq 0$ με $a_n \to a$ και k φυσικός αριθμός

Τότε $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$

Αποδ.

Σύμφωνα με προηγούμενη Πρόταση προκύπτει $a \geq 0$

1η περίπτωση $a=0$

Έστω $\varepsilon>0$ Εφόσον $a_\nu \to 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq \nu_0$ να ισχύει $|a_\nu| < \varepsilon^k \Rightarrow |\sqrt[k]{a_\nu}| < \varepsilon$

Επομένως $\sqrt[k]{a_\nu} \to 0 = \sqrt[k]{0}$

2η περίπτωση $a>0$

$$x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

$$|\sqrt[k]{a_\nu} - \sqrt[k]{a}| = \frac{|(\sqrt[k]{a_\nu})^k - (\sqrt[k]{a})^k|}{(\sqrt[k]{a_\nu})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_\nu})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \dots + \sqrt[k]{a_\nu}(\sqrt[k]{a})^{k-2} + (\sqrt[k]{a})^{k-1}}$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{\frac{1}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}}}_{\text{σταθ.}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{|a_\nu - a|}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

Συνεπώς $\sqrt[k]{a_\nu} - \sqrt[k]{a} \to 0$

άρα $\sqrt[k]{a_\nu} \to \sqrt[k]{a}$

Παραδείγματα

1) $x_\nu = \sqrt[\nu]{5^\nu + 8^\nu}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 8}}{8} = \sqrt[\nu]{8^\nu} \leq \sqrt[\nu]{5^\nu + 8^\nu} \leq \sqrt[\nu]{8^\nu + 8^\nu} = \sqrt[\nu]{2 \cdot 8^\nu} = \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[\nu]{2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 8}}{8}}_{8}$$

Απο θεωρ. ισοσ. ακολ. $x_\nu \to 8$

2) $y_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^3 \cdot 5^\nu + 8^\nu}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 8}}{8} = \sqrt[\nu]{8^\nu} \leq \sqrt[\nu]{\nu^3 5^\nu + 8^\nu} \leq \sqrt[\nu]{\nu^3 \cdot 8^\nu + 8^\nu} = \sqrt[\nu]{8^\nu(\nu^3+1)} = 8\sqrt[\nu]{\nu^3+1} \leq$$

$$\leq 8\sqrt[n]{n^3+n^3} = 8\sqrt[n]{2n^3} = \underset{\substack{\downarrow \\ 8}}{8}\,\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{2}}\cdot\underset{\substack{\downarrow \\ 1^3=1}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}$$

Απο θεωρ. ισοσ. ακολ. η $y_n \to 8$.